Dans tout le problème, pour *f* fonction bornée sur ℝ à valeurs réelles, on note $\|f\|$, la norme uniforme de *f* sur ℝ. La dérivée $k^{\text{ième}}$ de *f*, si elle existe est notée $f^{(k)}$, et on convient que $f^{(0)} = f$

I

Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des fonctions *f* définies sur ℝ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cos(ix) + b_i \sin(ix)$$

où les a_i et les b_i sont des réels.

1. Montrer que si *f* appartient à $\mathcal{T}_n$, et s'il existe un réel α et $2n+1$ réels *x* distincts appartenant à $[\alpha, \alpha + 2\pi[$ et tels que $f(x) = 0$ alors *f* est la fonction nulle.

2. Soient *a* et *b* deux réels et *s* définie sur ℝ par $r(x) = a\sin(nx+b)$. Vérifier que $\|s'\| = n\|s\|$.

3. On suppose dans cette question qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{T}_n$ et un réel *u* pour lequel $g'(u) = \|g'\|$ et $\|g'\| > n\|g\|$, et on note *h* la fonction définie par $h(x) = \dfrac{1}{n}\|g'\|\sin(n(x-u)) - g(x)$

a. Montrer que *h* change exactement $2n$ fois de signe sur $\left[u + \dfrac{\pi}{2n}, u + 2\pi + \dfrac{\pi}{2n}\right[$

b. Calculer $h'(u)$ et montrer que h' s'annule au moins $2n+1$ fois sur $[u, u+2\pi]$.

c. Calculer $h''(u)$ et montrer que h'' s'annule au moins $2n+1$ fois sur $[u, u+2\pi[$.

d. Les hypothèses faites sur *g* sont elles compatibles entre elles ?

4. Pour $f \in \mathcal{T}_n$, montrer que $\left\|f^{(k)}\right\| \leq n^k \|f\|$.

Si *n* et *k* sont fixés, existe-t-il des fonctions pour lesquelles l'égalité est atteinte ?

5. Quelle est la norme de l'endomorphisme de $\mathcal{T}_n$: $f \mapsto f'$ pour $\mathcal{T}_n$ muni de $\|\ \|$?

II

Pour tout entier *n* positif ou nul, on note $\mathcal{P}_n$, l'ensemble des fonctions polynômes d'une variable réelle, à coefficients réels, et de degré au plus *n*. Pour $P \in \mathcal{P}_n$, on pose $\mathrm{N}(P) = \sup\limits_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)|$.

On note $\mathrm{N}'(P)$ la plus grande des valeurs absolues des coefficients de *P*.

1. Soit *C* la fonction définie sur $[-1,1]$ par $C(x) = \cos(n \arccos x)$

a. Montrer que *C* coïncide sur $[-1,1]$ avec une fonction de $\mathcal{P}_n$ qu'on notera aussi *C* et calculer $\mathrm{N}(C)$.

b. Montrer par récurrence que pour tout réel *t*, $|\sin(nt)| \leq n|\sin t|$.

En déduire l'inégalité $N(C') \leq n^2$ puis la valeur $N(C')$.

2. On note $x_1,\dots,x_n$ les racines de C classées dans l'ordre décroissant.

a. Montrer que pour $x\in[x_n,x_1]$, on a $n\sqrt{1-x^2}\geq 1$.

b. Calculer $|C'(x_i)|$ en fonction de x_i pour $i\in[\![1,n]\!]$

3. Soit $Q\in\mathcal{P}_{n-1}$, $(n\geq 1)$; on pose $\mathrm{M}(Q)=\sup\limits_{x\in[-1,1]}\left|Q(x)\sqrt{1-x^2}\right|$.

a. Montrer que pour x n'annulant pas C on a $Q(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}Q(x_i)\dfrac{C(x)}{(x-x_i)C'(x_i)}$.

b. Simplifier $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{|x-x_i|}$ pour $x\notin[x_n,x_1]$.

c. Déduire de ce qui précède que $\mathrm{N}(Q)\leq n\,\mathrm{M}(Q)$.

(Pour majorer $|Q(x)|$, on distinguera les cas $x\in[x_n,x_1]$ et $x\notin[x_n,x_1]$).

4. Soit P un polynôme appartenant à $\mathcal{P}_n$ et $k\in[\![0,n]\!]$.

a. Montrer que pour $x\in\,]-1,1[$ $|P'(x)|\leq n\dfrac{\mathrm{N}(P)}{\sqrt{1-x^2}}$. On pourra utiliser $t\mapsto P(\cos t)$.

b. Etablir l'inégalité $N\left(P^{(k)}\right)\leq\left(\dfrac{n!}{(n-k)!}\right)^2 N(P)$.

c. Vérifier l'équivalence des normes N et N' en précisant pour le quotient $\dfrac{\mathrm{N}'(P)}{\mathrm{N}(P)}$ un encadrement indépendant de P.

d. Quelle est la norme de l'endomorphisme $P\mapsto P'$ de $\mathbb{R}_n[X]$ pour $\mathbb{R}_n[X]$ muni de la norme N.

III

Soit f une fonction à valeurs réelles définie et n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{R}$ ainsi que sa dérivée $n^{\text{ième}}$.

1. Pour $x\in\mathbb{R}$, on définit le polynôme $P_x\in\mathcal{P}_{n-1}$ par $P_x(y)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}f^{(k)}(x)\dfrac{y^k}{k!}$.

a. Majorer $\mathrm{N}(P_x)$ à l'aide de $\|f\|$ et $\left\|f^{(n)}\right\|$.

b. En déduire que pour tout $k\in]\!]0,n[\![$ $f^{(k)}$ est bornée et $\left\|f^{(k)}\right\|\leq\left(\dfrac{n!}{(n-k)!}\right)^2\left(\|f\|+\dfrac{1}{n!}\left\|f^{(n)}\right\|\right)$

Soit λ un réel fixé. On applique le résultat de la question précédente en remplaçant f par φ où $\varphi(x)=f(\lambda x)$.Par un choix convenable de λ, montrer que $\left\|f^{(k)}\right\|\leq 2\dfrac{n!^{2-\frac{k}{n}}}{(n-k)!}\left(\|f\|^{1-\frac{k}{n}}\left\|f^{(n)}\right\|^{\frac{k}{n}}\right)$